Eksamen (kont.) 2017 GM

AR101015
11.08.2017

Løsningsforslag

Oppgave 1

1a) $a(a^2+3a+4) - a^2(a-5) =$

$\cancel{a^3} + 3a^2 + 4a - \cancel{a^3} + 5a^2 =$

$8a^2 + 4a$

1b) $\frac{24 s^3 t^3 u^{10} t^{-2} a}{6 t^4 u^5 3a^2} = \frac{24}{6\cdot 3} \cdot s^3 \cdot t^3 \cdot t^{-4} \cdot u^{10} \cdot u^{-5} \cdot t^{-2} \cdot a \cdot a^{-2} =$

$= \frac{4}{3} \cdot s^3 \cdot t^{(3-4-2)} \cdot u^{(10-5)} \cdot a^{(1-2)} =$

$= \frac{4}{3} s^3 t^{-3} \cdot u^5 \cdot a^{-1}$ eller $\frac{4}{3} \frac{s^3 u^5}{a t^3}$

1c) $\frac{\frac{2xz^2}{y^2}}{\frac{(2xy)^2}{z^2 y}} = \frac{2xz^2}{y^2} \cdot \frac{z^2 y}{(2xy)^2} = \frac{2x \cdot z^2 \cdot z^2 y}{y^2 \cdot 2^2 x^2 y^2} =$

$= \frac{\cancel{2}x\, z^4 y}{\cancel{4}x^2 y^4} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{-2} z^4 \cdot y \cdot y^{-4} =$

$= \frac{1}{2} x^{-1} z^4 y^{-3} = \frac{z^4}{2x \cdot y^3}$

d) $(-x^2)(3-x)(3+x) \le 0$ $\quad (3-x) = -(x-3)$ $\quad (3+x) = (x+3)$

		-3		0		3	
$-x^2$	− − −		− − −	0	− − −		− − −
$-(x-3)$	+ +		+ +		+ +	0	− − −
$(x+3)$	− − −	0	+ +		+ +		+ + +
Produkt	+ + +	0	− − −	0	− − −	0	+ + +

Løsning: produktet er < 0 når $-3 \le x \le 3$

Oppgave 1 (kont.)

3) $\begin{cases} 6x+2y-1=0 \\ 2y-4x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+6x=1 & \times(-1) \\ 2y-4x=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -2y-6x=-1 \\ 2y-4x=4 \end{cases} \quad (-)$ → vi subtraherer de to likningene.

$-10x = 3 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{10}}$

Vi setter $x = \frac{-3}{10}$ i en av likningene for å

finne y: $2y + 6\cdot\left(\frac{-3}{10}\right) = 1 \Leftrightarrow 2y - \frac{18^{\div 2}}{10_{\div 2}} = 1$

$\Leftrightarrow 2y = 1 + \frac{9}{5} \Leftrightarrow 2y = \frac{14}{5} \Leftrightarrow y = \frac{\cancel{14}}{5}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{7}{5}}$

Oppgave 2

1. $x^2 - x - 2$ faktorisere $\Rightarrow$ finne løsning til $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$ ABC formelen.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ og } x_2 = \frac{1-3}{2} = -\frac{2}{2} = -1.$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

2. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 : (x-1) = 2x^2 + 5x + 2$

$$-(2x^3 - 2x^2)$$
$$0 + 5x^2 - 3x$$
$$-(5x^2 - 5x)$$
$$0 + 2x - 2$$
$$-(2x - 2)$$
$$0$$

Svar: $2x^2 + 5x + 2$

3. $10^{-2x} = 10.000$ $\quad 10.000 = 10^4.$

$$\Rightarrow 10^{-2x} = 10^4. \Leftrightarrow$$

$$-2x = 4 \quad \stackrel{\times(-1)}{\Leftrightarrow}$$

$$2x = -4 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{4}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = -2}$$

Oppgave 3

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

1. $f(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ er et nullpunkt $\Rightarrow$

det er mulig å dele funksjonens $f(x)$ med $(x-1)$ og finne et polynom av 2. grad, for å bruke abc formelen for å finne flere nullpunkt.

Men vi ser at vi har allerede utført divisjonen $(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2) : (x-1)$ i Oppgave 2.2.

Det blir $2x^2 + 5x + 2$,

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.2.2}}{2.2} =$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = -0{,}5.$$

$$x_2 = \frac{-5-3}{4} = -\frac{8}{4} = -2.$$

$\Rightarrow$ Nullpunkter er $(-2;0)$, $(-0{,}5;0)$ og $(1,0)$.

2. For å avgjøre monotoniegenskapene til $f(x)$, bruker vi den første deriverte $f'(x)$.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 3 = 3(2x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.2.(-1)}}{2.2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} \overset{*}{=} \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

*

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 . 3$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}37$$

og $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \approx -1{,}37$

$$\Rightarrow f'(x) = 6(x - 0{,}37).(x + 1{,}37).$$

Vi må drøfte $f'(x)$:

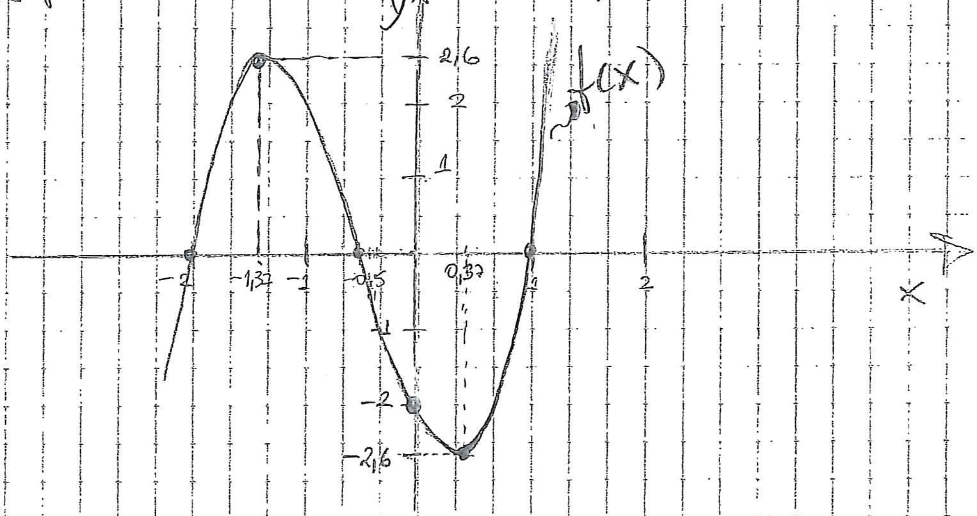
	$-1{,}37$		$0{,}37$	
6	$+ + +$	$+ + + + +$	$+$	$+ + + +$
$x - 0{,}37$	$- - - -$	$- - - -$	0	$+ + + +$
$x + 1{,}37$	$- - -$	0	$+ + + + +$	$+ + + +$
$f'(x)$	$+ + +$	0 $- - - - -$	0	$+ + + +$

$\Rightarrow$ $f(x)$ har maksimalpunkt $x \simeq -1{,}37$ og minimalpunkt $x \simeq 0{,}37$.

3. Vi regner ut noen funksjonsverdier for å skisser grafen:

$(f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2)$

x	$f(x)$
-2	0
$-1{,}37$	$2{,}60$
$-0{,}5$	0
$0{,}37$	$-2{,}60$
1	0
0	-2



4. Vendepunkt: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{12} \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ når $x = -\frac{1}{2}$ skifter funksjonen $f''(x)$ fortegn. $\boxed{x = -\frac{1}{2} \text{ er det eneste vendepunkt}}$

Likningen til tangenten er $y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 6 \cdot \frac{1}{4} - \frac{6}{2} - 3 = \frac{3}{2} - 6 = -\frac{9}{2}$

$\Rightarrow$ Likningen blir $y = -\frac{9}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{9}{2}x - \frac{9}{4}}$

Oppgave 4 Pris per flaske vin: $p(t) = 200 - 150e^{-0,5t}$

t = tid i år

1. Etter 3 år er prisen

$$p(3) = 200 - 150e^{-0,5\cdot 3} \underline{\underline{=}} \text{ kr } 166,53$$

2. $I(t)$ størst mulig ... $\Rightarrow$ ekstremale punkt til $I(t)$

$$I(t) = p(t) \cdot k(t) \quad ; \quad k(t) = Ne^{-0,03t}$$

$$I(t) = (200 - 150e^{-0,5t}) \cdot N \cdot e^{-0,03t}$$
$$= 200Ne^{-0,03t} - 150Ne^{(-0,5t - 0,03t)}$$
$$= 200Ne^{-0,03t} - 150Ne^{-0,53t}$$

Deriverte av eksponentiell funksjon:

$$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$\Rightarrow I'(t) = 200 \cdot Ne^{-0,03t} \cdot (-0,03) - 150Ne^{-0,53t} \cdot (-0,53)$$
$$= 200 \cdot (-0,03) Ne^{-0,03t} - 150 \cdot (-0,53) Ne^{-0,53t}$$
$$= -6Ne^{-0,03t} + 79,5Ne^{-0,53t}$$

$$I'(t) = 0 \Leftrightarrow -6Ne^{-0,03t} + 79,5Ne^{-0,53t} = 0$$

$$\Leftrightarrow 79,5Ne^{-0,53t} = 6Ne^{-0,03t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-0,53t}}{e^{-0,03t}} = \frac{6N}{79,5N} \Leftrightarrow e^{-0,5t} = \frac{6}{79,5} \Leftrightarrow$$

$$-0,5t = \ln\left(\frac{6}{79,5}\right) \Rightarrow -0,5t = -2,584$$

$$\Rightarrow t = \frac{2,584}{0,5} = 5,17$$

$\Rightarrow$ Produsenten bør selge vinen etter 5 år.

Oppgave 5 "Pensjonsforsikring"

Årlige premien kr 7000 i 20 år.

$\Rightarrow$ Pensjon kr 80 000 i 7 år.

(1) rente 12%.

Ved egen sparing, samler hun totalt:

$$\underbrace{7000 \cdot (1{,}12^{20} + 1{,}12^{19} + \ldots + 1{,}12 + 1)}_{21 \text{ ledd i en geometrisk rekke}} =$$

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{k^n - 1}{k - 1}\right) \qquad k = 1{,}12 \quad n = 21.$$

$$S_{21} = 7000 \cdot \frac{1{,}12^{21} - 1}{1{,}12 - 1} = \text{kr } \underline{571\,891}.$$

Denne verdien må sammenlignes med nåverdien av en annuitet på kr 80.000 over 7 år til en rente på 12%. (dette er = samlede pensjonens verdi ved fylte 60 år) her er $n = 7$; $r = 0{,}12$.

$$K_0 = k \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n \cdot r} = 80000 \frac{(1{,}12)^7 - 1}{(1{,}12)^7 \cdot 0{,}12} =$$

$$= \text{kr. } \underline{365\,100}.$$

Det betyr at egen sparing er best!

(2) Reduksjon på 40% på premiebeløpet $\Rightarrow$ innbetalt beløp ved egen sparing vil være 60% av det opprinnelige beløpet:

$0{,}6 \cdot 571.891 = \text{kr } 343.134 \Rightarrow$

Det lønner seg å ta pensjonsforsikringen.

2 $\Rightarrow$

(3) For å spare like mye som blir utbetalt ved forsikringsordningen ved å sette av kr 7000 årlig må man bruke $\underline{n}$ antall år:

$$\frac{1{,}12^n - 1}{0{,}12} = \frac{365\,100}{7000} \Rightarrow 1{,}12^n = 7{,}259$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln 7{,}259}{\ln 1{,}12} = \underline{17{,}5 \text{ år}}$$