Oppgave 1

a) Løs likningen $x^2 + x - 6 = 0$.

b) Løs likningen
$$\frac{3x}{2} + 7\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 8.$$

c) Løs ulikheten $x^2 + 4x - 5 < 0$.

d) Løs ulikheten
$$\frac{x-1}{x^2-4} \geq 0.$$

Oppgave 2

a) Deriver $g(x) = (3x + \ln x)^3$.

b) Deriver $h(x) = e^x (x - 2)$.

c) Deriver $k(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$.

Oppgave 3

I en uendelig geometrisk rekke er tredje ledd
$$a_3 = \frac{1}{2}x^2$$
og fjerde ledd
$$a_4 = \frac{1}{4}x^3.$$

a) Bestem rekkens kvotient og rekkens første ledd.

b) Bestem et uttrykk som gir summen s av den uendelige rekken når den konvergerer.

c) For hvilke verdier av x vil rekken konvergere?

Oppgave 4

Kr 10000 settes i banken til $2,8\%$ rente per år.

a) Hva har beløpet vokst til etter ti år ved årlig forrentning?

b) Hva har beløpet vokst til etter ti år ved kontinuerlig forrenting?

c) Bruk logaritmeregning til å bestemme hvor lang tid det tar før beløpet er fordoblet ved årlig forrentning.

Oppgave 5

En funksjon er gitt ved

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x,\ D_f = R.$$

a) Bestem $f'(x)$, den deriverte til $f(x)$.

b) Bestem førstekoordinaten for eventuelle topp- og bunnpunkt for $f(x)$.

c) Bestem $f''(x)$, den andrederiverte til $f(x)$.

d) Bestem ligningen for vendetangenten til f.

Oppgave 6

En bedrift regner at kostnadene ved å produsere x antall enheter av en vare er gitt ved funksjonen:

$$K(x) = 0,001x^2 + 12x + 4000, \qquad 0 \leq x \leq 6000.$$

a) Finn funksjonsuttrykk for grensekostnaden og for enhetskostnaden.

b) Beregn den x-verdien som gjør enhetskostnaden minimal. Finn enhetskostnad og grensekostnad i dette tilfellet.

c) Inntekten ved salg av x enheter av denne varen er gitt ved funksjonen:

$$I(x) = 30x - 0,002x^2.$$

Bestem et uttrykk for profitten og bestem den x-verdien som gir maksimal profitt.

Oppgave 7

En funksjon i to variabler er gitt ved

$$f(x, y) = 3x^2y - 3y.$$

a) Bestem de første og andre ordens partielle deriverte av f.

b) Bestem x- og y-koordinatene til eventuelle stasjonære (kritiske) punkt for $f(x, y)$.

c) Klassifiser eventuelle stasjonære punkt i sadelpunkt, lokale bunnpunkt og lokale toppunkt.

Oppgåve 1

a) Løys likninga $x^2 + x - 6 = 0$.

b) Løys likninga

$$\frac{3x}{2} + 7\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 8.$$

c) Løys ulikskapen $x^2 + 4x - 5 < 0$.

d) Løys ulikskapen

$$\frac{x-1}{x^2-4} \geq 0.$$

Oppgåve 2

a) Deriver $g(x) = (3x + \ln x)^3$.

b) Deriver $h(x) = e^x (x - 2)$.

c) Deriver $k(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$.

Oppgåve 3

I ei uendeleg geometrisk rekke er tredje ledd

$$a_3 = \frac{1}{2}x^2$$

og fjerde ledd

$$a_4 = \frac{1}{4}x^3.$$

a) Bestem rekkas kvotient og rekkas første ledd.

b) Bestem eit uttrykk for summen s av den uendelege rekka når ho konvergerer.

c) For kva verdiar av x vil rekka konvergere?

Oppgåve 4

Kr 10000 blir sett i banken til $2,8\%$ rente per år.

a) Kva veks beløpet til på ti år ved årleg forrenting?

b) Kva veks beløpet til på ti år ved kontinuerleg forrenting?

c) Bruk logaritmerekning til å bestemme kor lang tid det tar før beløpet er dobla ved kontinuerleg forrenting.

Oppgåve 5

Ein funksjon er definert ved

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x, \ D_f = R.$$

a) Bestem $f'(x)$, den deriverte til $f(x)$.

b) Bestem fyrstekoordinaten for eventuelle topp- og botnpunkt for $f(x)$.

c) Bestem $f''(x)$, den andrederiverte til $f(x)$.

d) Bestem likninga for vendetangenten til f.

Oppgåve 6

Ei bedrift reknar at kostnadane ved å produsere x einingar av ei vare er gjeven ved funksjonen:

$$K(x) = 0,001x^2 + 12x + 4000, \quad 0 \leq x \leq 6000.$$

a) Finn funksjonsuttrykk for grensekostnaden og for einingskostnaden.

b) Rekn ut den x-verdien som gjer einingskostnaden minimal. Finn einingskostnad og grensekostnad i dette høvet.

c) Inntekta ved sal av x einingar av denne vara er gjeven ved funksjonen:

$$I(x) = 30x - 0,002x^2.$$

Bestem eit uttrykk for profitten og bestem den x-verdien som gjev maksimal profitt.

Oppgåve 7

Ein funksjon i to variablar er definert ved

$$f(x, y) = 3x^2y - 3y.$$

a) Bestem dei første og andre ordens partielle deriverte av f.

b) Bestem x- og y-koordinatane til eventuelle stasjonære (kritiske) punkt for $f(x, y)$.

c) Klassifiser eventuelle stasjonære punkt i sadelpunkt, lokale botnpunkt og lokale toppunkt.

Løsningsforslag:

Oppgave 1

a)

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

b) Løs likningen $\frac{3x}{2} + 7\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 8$, Løsning $x = 3$.

c)

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

Fra fortegnsskjema for

$$x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$$

finner vi løsningen $x \in \langle -5, 1 \rangle$.

d) Løs ulikheten

$$\frac{x-1}{x^2-4} \geq 0 \quad \text{Løsning: } \langle -2, 1] \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$$

Oppgave 2

a) $\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}(3x + \ln x)^3 = 3(3x + \ln x)^2 \left(3 + \frac{1}{x}\right)$

b) $\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{dx}(e^x(x-2)) = e^x(x-1)$.

c) $\frac{d}{dx} k(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{x^2}\right) = \frac{x-2}{x^3}$.

Oppgave 3

a)

$$k = \frac{a_4}{a_3} = \frac{\frac{1}{4}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{x}{2}.$$

$$a_3 = a_1 k^2$$

slik at

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 k^{1-3} = a_3 k^{-2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{-2} = 2. \end{aligned}$$

b)

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2}{1-\frac{x}{2}} = \frac{4}{2-x}.$$

c) En geometrisk rekke konvergerer når $-1 < k < 1$. Vi krever altså at

$$-1 < \frac{x}{2} < 1$$

som gir

$$-2 < x < 2.$$

Oppgave 4

a)

$$\begin{aligned} K_{10} &= K_0 \left(1 + \frac{2.8}{100}\right)^{10} \\ &= 10000 \left(1 + \frac{2.8}{100}\right)^{10} \\ &= 13180. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} K_{10} &= K_0 e^{0.028 \cdot 10} \\ &= 10000 e^{0.028 \cdot 10} \\ &= 13231. \end{aligned}$$

c) Vi har at

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{2.8}{100}\right)^n$$

og krever at

$$K_n = 2K_0.$$

Dette gir at

$$K_0 \left(1 + \frac{2.8}{100}\right)^n = 2K_0$$

altså

$$1.028^n = 2.$$

Tar den naturlige logaritmen på begge sider:

$$\begin{aligned} \ln 1.028^n &= \ln 2, \\ n \ln(1.028) &= \ln 2, \\ n &= \frac{\ln 2}{\ln 1.028} \\ &= 25.1. \end{aligned}$$

Oppgave 5

a)

$$f'(x) = x^2 - 2x - 8.$$

b) Setter den deriverte lik null og drøfter fortegnet ved fortegnsskjema.

$$f'(x) = x^2 - 2x - 8 = 0.$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Da er

$$x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2).$$

Det følger av fortegnsskjemaet at f har toppunkt for $x = -2$ og bunnpunkt for $x = 4$.

c)

$$f''(x) = 2x - 2.$$

d) Vi finner x-koordinaten til vendepunktet ved å sette den andrederiverte lik null:

$$f''(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Vendetangenten er gitt ved

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

der $x_1 = 1$ og

$$\begin{aligned} y_1 = f(x_1) &= \frac{x_1^3}{3} - x_1^2 - 8x_1 \\ &= \frac{1^3}{3} - 1^2 - 8 \cdot 1 = -\frac{26}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= x_1^2 - 2x_1 - 8 \\ &= 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9. \end{aligned}$$

Dette gir

$$y - \left(-\frac{26}{3}\right) = (-9)(x-1),$$

$$y = -9x + 9 - \frac{26}{3} = \frac{1}{3} - 9x.$$

Oppgave 6

a) Grensekostnaden

$$K'(x) = 0.002x + 12.$$

Enhetskostnaden

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{K(x)}{x} \\ &= 0.001x + 12 + \frac{4000}{x}. \end{aligned}$$

b) Setter

$$A'(x) = 0.001 - \frac{4000}{x^2} = 0$$

som gir

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{4000}{0.001} \\ &= 4.0 \times 10^6 \\ x &= 2000. \end{aligned}$$

Enhetskostnaden er da

$$A(2000) = 0.001 \cdot 2000 + 12 + \frac{4000}{2000} = 16.$$

Grensekostnad blir alltid lik enhetskostnad nnår enhetskostnad er minimal, så

$$K'(2000) = 16. \text{ (slipper å regne.)}$$

c) Profitten blir

$$\begin{aligned} P(x) &= I(x) - K(x) \\ &= 30x - 0.002x^2 - \left(0.001x^2 + 12x + 4000\right) \\ &= 30x - 0.002x^2 - 0.001x^2 - 12x - 4000 \\ &= -0.003x^2 + 18x - 4000. \end{aligned}$$

Setter

$$\begin{aligned} P'(x) &= -0.006x + 18 = 0 \\ x &= \frac{18}{0.006} = 3000. \end{aligned}$$

Oppgave 7

a)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2y - 3y \\ f'_x(x,y) &= 6xy, \\ f'_y(x,y) &= 3x^2 - 3, \\ f''_{xx}(x,y) &= 6y, \\ f''_{xy}(x,y) &= 6x. \\ f''_{yy}(x,y) &= 0, \end{aligned}$$

b) Setter begge de partielt deriverte av første orden lik null og får:

$$\begin{aligned} 6xy = 0 \wedge 3x^2 - 3 = 0. \\ x = \pm 1,\ y = 0 \end{aligned}$$

De stasjonære punktene blir altså $(-1,0)$ og $(1,0)$.

c)

(x,y)	$f''_{xx} = 6y$	$f''_{xy} = 6x$	f''_{yy}	$f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2$	Klassifisering
$(-1,0)$	0	-6	0	-36	Sadelpunkt
$(1,0)$	0	6	0	-36	Sadelpunkt