

Skrivne og trykte hjelpemiddel samt kalkulator er tillate.  
Ta med **all mellomrekning** som trengst for å grunngje svaret.

Oppgåve 1..... (20%)

La den stokastiske variabelen  $X$  være summen av to uniformt fordelte slumptall i intervallet  $[0, 1]$ .  
Sannsynlighetstettheten er:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0, \\ x & \text{for } 0 < x < 1, \\ 2 - x & \text{for } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{for } x \geq 2. \end{cases}$$

- (a) Kva er utfallsrommet for eksperimentet?
  - (b) Plott sannsynlighetstetthetsfunksjonen (PDF) på millimeterpapir.
  - (c) Rekn ut forventningsverdien  $\mu$  for  $X$ .
  - (d) Rekn ut standardavviket  $\sigma$  for  $X$ .
  - (e) Rekn ut den kumulative fordelingsfunksjonen  $F(X)$ .
- Vi trekker seks tall fra denne fordelingen og får (avrundet på to desimaler):

{1,02; 1,29; 1,43; 1,21; 0,49; 0,70.}

- (f) Rekn ut utvalgsmiddelverdien.
- (g) Rekn ut utvalgsvariansen.
- (h) Gi den empiriske sannsynlighetsfordelingen for  $X$  basert på utvalget. Bruk en binstørrelse på 0,5.
- (i) Gi den empiriske kumulative sannsynlighetsfordelingen for  $X$  basert på utvalget.

Oppgåve 2..... (3%)

Lat  $\bar{X}$  vera gjennomsnitt av  $n$  identisk og uavhengig fordelte stokastiske variablar kvar med forventning  $\mu$  og varians  $\sigma^2$ . Kva er  $\text{var}(\bar{X})$  lik?

Oppgåve 3..... (12%)

Me ynsker å finna gjennomsnittsfarta til køyretya på ein bestemt vegstrekning. Ti køyrety vert målt, og me finn fart i km/h:

78, 67, 82, 95, 85, 79, 86, 89, 92, 75

- (a) Rekna ut utvalgsgjennomsnittet.
- (b) Rekna ut utvalsstandardavviket.
- (c) Bruk  $t$ -fordelinga og rekna ut eit 95% konfidensinterval for forventa fart.
- (d) Kva føresetnad(er) må du gjera for at  $t$ -fordelinga skal vera gyldig?

Oppgåve 4..... (7%)

Kommunikasjonssystem er utsett for støy, og feilkorrigerande kodar vert brukt for å sikra robust kommunikasjon. Likevel førekjem feil. Forklar korleis du kan bruka ein simulator til å estimera sannsynet for dekodingsfeil i eit slikt kommunikasjonssystem.

Oppgåve 5..... (9%)

Vi vil simulere et rovdyr-byttedyr-system av to arter fisk som lever i en innsjø. Det er kjent at fisk av type A hovedsakelig lever av fisk av type B, og at fisk av type B ikke har andre naturlige fiender enn fisk av type A. Svingninger i populasjonene er blitt observert.

Kva slags type simulering er best egnet i de følgende tilfellene? Forklar ditt svar. Velg fra differensiallikninger, Gillespie-algoritmen, og en cellulær automaton-simulering.

I tilfellet:

- Begge arter beveger seg raskt, og krysser hele innsjøen flere ganger per dag. Antallene fisk av begge er kjent å være store, også på bunnen av svingningsperiodene.
- Begge arter beveger seg raskt, og krysser hele innsjøen flere ganger per dag. Det er kjent at antallet fisker av type A kan være så lite som 50 på bunnen av en svingningsperiode.
- Innsjøen er stor, og fiskene lever i grupper.

Oppgåve 6..... (8%)

I denne oppgåva skal me kasta terning.

- Rekn ut forventningsverdi og populasjonsstandardavvik for et kast med en firesidet terning med utfallsrom  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

For en sekssidet terning er forventningsverdien lik 3,5 og populasjonsstandardavvik lik  $\sqrt{35/12}$ .

- Vi kaster 10 firkantete og 5 sekskantete terninger. La den stokastiske variabelen  $X$  være summen av antall øyne på alle 15 terningene. Rekn ut forventningsverdi  $\mu$  og standardavvik  $\sigma$  for  $X$ .

Oppgåve 7..... (15%)

En partikkel beveger seg over en raster. Hvert tidssteg beveger den seg med 90% sannsynlighet mot høyre, og med 10% sannsynlighet mot venstre.

- Kva er sannsynsfordelinga etter to tidssteg, hvis den begynner på rasterposisjon  $i = 0$  på tidspunkt  $n = 0$ ?
- Kva er punktsannsynligheten  $p(x)$  for at partikkelen etter  $n$  tidssteg har tatt eksakt  $x$  steg mot høyre (og  $n - x$  steg mot venstre)?
- Vis at sannsynlighetsfordelingen til posisjonen etter ett tidssteg har middelvei  $\mu = 0.8$  og standardavvik  $\sigma = 0.3$ .
- Gi verdiene for  $\mu$  og  $\sigma$  etter 10000 tidssteg.
- Gi et 99% konfidensintervall for posisjonen etter 10000 tidssteg.

Oppgåve 8..... (11%)  
 Vi simulerer den følgende rovdyr-byttedyrmodellen med Gillespie-algoritmen:

$$\begin{aligned}
 X &\rightarrow 2X \text{ med rate } \alpha \times N_X, & (1) \\
 X + Y &\rightarrow Y \text{ med rate } \beta \times N_X \times N_Y, & (2) \\
 Y &\rightarrow \emptyset \text{ med rate } \gamma \times N_Y, \text{ og} & (3) \\
 Y &\rightarrow 2Y \text{ med rate } \delta \times N_X \times N_Y. & (4)
 \end{aligned}$$

Her antyder X byttedyr, Y rovdyr,  $N_X$  antallet byttedyr og  $N_Y$  antallet rovdyr i systemet.

- (a) Forklar hvilke hendelsene beskrives av likning (1)–(4). Forklar også ratene.  
 Vi begynner simuleringen med 200 byttedyr ( $N_X = 200$ ) og 20 rovdyr ( $N_Y = 20$ ), og bruker ratene  $\alpha = 10/\text{år}$ ,  $\beta = 0.1/\text{år}$ ,  $\gamma = 0.1/\text{år}$  og  $\delta = 0.01/\text{år}$ .
- (b) Regn ut ratene for likning 1-4 ved starten av simuleringen.
- (c) Hva er sannsynligheten for at den første hendelsen som skjer er hendelse 3?
- (d) Hva er mest sannsynlig: at antallet byttedyr øker eller minker fra begynnelsen av simuleringen?

Oppgåve 9..... (15%)  
 Gjeve fylgjande datasett av parvise observasjonar:

|     |    |   |    |    |
|-----|----|---|----|----|
| $x$ | 2  | 4 | 6  | 8  |
| $y$ | -6 | 3 | 15 | 24 |

Du skal gjera ein regresjonsanalyse.

- (a) Anvend minstekvadratsummens metode for å finne for hvilke verdier av  $a$  og  $b$  linja  $y = a + bx$  best beskriver datasettet.
- (b) Plot datapunktene og linja sammen i en graf på millimeterpapir.
- (c) Rekn ut utvalgskovariansen for datasettet.
- (d) Rekn ut utvalgskorrelasjonskoeffisienten for datasettet.
- (e) Rekn ut et 95%-konfidensintervall for stigningstallet  $b$ .